

پاسخنامه تشریحی

۱

در این سوال باید طول کمان مقابل به زاویه 36° را در دایره‌ای به شعاع 6320 km بیابیم.

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5} \text{ رادیان} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{5}, r = 6320 \text{ km}$$

$$l = r \cdot \alpha = 6320 \times \frac{\pi}{5} = 1264\pi = 1264 \times 3.14 = 3968.96 \text{ km}$$

۲

$$\text{مساحت قطاع } AOB = \frac{\pi}{2\pi} \times (\text{مساحت دایره}) = \frac{1}{6} \times \pi r^2 = \frac{\pi \times 4^2}{6} = \frac{8\pi}{3} = \frac{8 \times 3}{3} = 8$$

$$\text{مساحت مثلث } AOB = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin \hat{AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{16}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{مساحت هاشور خورده} = 8 - 4\sqrt{3}$$

۳

$$\frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ رادیان}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{13\pi}{18} \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow 2\alpha = \frac{13\pi}{18} + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi + 3\pi}{18} = \frac{16\pi}{18} = \frac{8\pi}{9} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{9}$$

$$\beta = \frac{13\pi}{18} - \frac{4\pi}{9} = \frac{13\pi - 8\pi}{18} = \frac{5\pi}{18} \Rightarrow \beta = \frac{5\pi}{18}$$

۴ هر ۵ دقیقه عقربه دقیقه شمار به اندازه 30° را طی می‌کند. $\frac{360}{12} = 30^\circ$

$$\frac{30}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{5 \text{ دقیقه}}{\text{رادیان}} = \frac{x}{\frac{15\pi}{2}} \Rightarrow \frac{30}{\pi} = \frac{2x}{15\pi}$$

$$\Rightarrow 2\pi x = 30 \times 15\pi \Rightarrow x = \frac{30 \times 15}{2} = 225 \text{ دقیقه}$$

۵ ابتدا فاصله بین هر دو کابین را بر حسب رادیان به دست می‌آوریم:

$$\text{فاصله هر دو کابین} = \frac{2\pi}{30} = \frac{\pi}{15} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{30\pi}{3\pi} = 10$$

به اندازه ۱۰ کابین جلو رفته‌ایم پس در موقعیت کابین $12 = 10 + 2$ قرار می‌گیریم.

۶

هر دور معادل 360° یا 2π رادیان است و هر ساعت معادل $3600 = 60 \times 60$ ثانیه است پس داریم:

$$\frac{3600}{1 \text{ ثانیه}} = \frac{400 \times 2\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{400 \times 2\pi}{3600} = \frac{8\pi}{36} = \frac{2\pi}{9} \text{ رادیان}$$

هر ثانیه $\frac{2\pi}{9}$ رادیان می‌گردد.

۷ اگر l طول کمان مقابل به زاویه α رادیان و r شعاع دایره باشد، داریم:

$$l = r \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, l = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow \frac{8\pi}{3} = r \times \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{r}{6} \Rightarrow r = 16 \text{ cm}$$

$$\text{قطر دایره} = 2 \times 16 = 32 \text{ cm}$$

۸

$$r = 2\text{cm}, \ell = 2\pi\text{cm} \rightarrow \theta = \frac{\ell}{r} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ رادیان}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{\pi}{\pi} = \frac{1}{2} \rightarrow D = 90^\circ$$

۹ اندازه زاویه بر حسب درجه برابر D و بر حسب رادیان برابر R می‌باشد و داریم:

$$R = \frac{\pi}{45} D - \frac{\pi}{3}, \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi D}{180} \Rightarrow \frac{\pi D}{180} = \frac{\pi D}{45} - \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{\pi D}{45} - \frac{\pi D}{180} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{D}{45} - \frac{D}{180} \xrightarrow{\times 180} 60 = 4D - D = 3D$$

$$\Rightarrow D = 20^\circ, R = \frac{\pi D}{180} = \frac{\pi \times 20}{180} = \frac{\pi}{9}$$

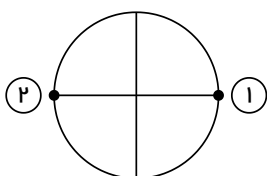
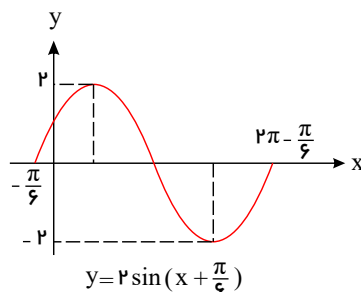
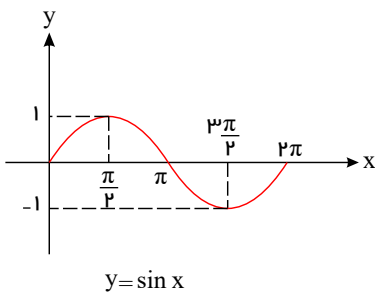
$$\frac{2 \sin(5\pi - \frac{\pi}{10}) - \sin(\pi + \frac{2\pi}{5}) + \sin(4\pi - \frac{2\pi}{5}) - 2 \cos(\pi - \frac{2\pi}{5})}{\cos(\pi - \frac{2\pi}{5}) + 2 \cos(3\pi - \frac{2\pi}{5}) - \sin(2\pi - \frac{\pi}{10})}$$

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5}}{-\cos \frac{2\pi}{5} - 2 \cos \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin(\frac{\pi}{10}) + 2 \cos(\frac{2\pi}{5})}{-3 \cos(\frac{2\pi}{5}) + \sin(\frac{\pi}{10})}$$

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10})}{-3 \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{\pi}{10}}{-3 \sin \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{4 \sin \frac{\pi}{10}}{-2 \sin \frac{\pi}{10}} = -2$$

$$y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

۱۰ برای رسم شکل کافی است در نمودار $y = \sin x$ شکل را $\frac{\pi}{6}$ روی محور x ها به سمت منفی انتقال دهیم و همچنین عرض تابع $y = \sin x$ را دو برابر کنیم.



۱۲ حاصل $[x]$ عددی صحیح است پس $\pi [x]$ برابر با مضارب صحیح π است و از روی دایره مثلثاتی مضارب صحیح π روی نقاط (۱) یا (۲) قرار دارند و در این دو نقطه مقدار سینوس صفر است، یعنی به ازای هر x حقیقی $\sin \pi [x] = 0$ برابر صفر است و داریم:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin \pi [x] = 0 \rightarrow f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi [x]} = \sqrt{-0} = \sqrt{0} = 0$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$\frac{\cos(3x - x) - \cos(3x + x)}{\cos(3x - x) + \cos(3x + x)} = \frac{\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x - \cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x}{\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x}$$

$$= \frac{2 \sin 2x \sin x}{2 \cos 2x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \tan 2x \tan x$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{5}{13}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع اول}} \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{12}{13} \xrightarrow{\beta \text{ در ربع سوم}} \sin \beta = -\frac{12}{13}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{12}{5}$$

$$\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = [\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha] [\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta]$$

$$= \left[\frac{4}{5} \times \frac{-5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13}\right] \left[\frac{4}{5} \times \frac{-5}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13}\right] = \left(-\frac{63}{65}\right) \times \left(-\frac{56}{65}\right) = \frac{3528}{4225}$$

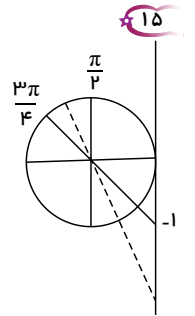
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{4}{3} \times \frac{12}{5}} = \frac{\frac{63}{15}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{63}{16}$$

$$\sin \alpha = -\frac{12}{13} \quad \alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = ?$$

$$\pi \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$$

با توجه به دایره مثلثاتی $\tan \frac{\alpha}{2}$ از -1 کمتر است.



$$\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{-12}{13} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow -6 - 6 \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 13 \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$6 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + 13 \tan \frac{\alpha}{2} + 6 = 0$$

$$\Delta = 169 - 144 = 25$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{-13 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} \text{قی } \frac{-18}{12} = -\frac{3}{2} \\ \text{غ } \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$